

# 一种改进的非结构化四边形网格铺砌算法

赵宇宇波

(中国石油大学(北京)机械与储运工程学院, 油气管道输送安全国家工程实验室,  
城市油气输配技术北京市重点实验室, 北京 102249)

**摘要** 为了能够快速生成高质量的非结构化网格, 本文对目前广泛采用的一种非结构化四边形网格直接生成算法——铺砌法进行了改进和优化。传统的铺砌法在网格单元整体尺寸分布和交叉判断处理效率上还存在不足, 本文对此提出了不同的解决思路和算法, 并基于该算法开发了相应的程序, 对若干不规则区域进行了非结构化四边形网格剖分, 并与著名的 CFD 前处理软件 Gambit 采用铺砌法生成的网格进行了对比, 发现本文算法生成的网格几何不规则度更小, 空间填充效率更高, 整体质量得到了较大提升。

**关键词** 网格生成; 非结构化网格; 四边形网格; 铺砌法

**中图分类号:** TK123 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-231X(2013)04-0728-05

## A Modified Paving Algorithm for Quadrilateral Mesh Generation

ZHAO Yu YU Bo

(National Engineering Laboratory for Pipeline Safety, Beijing Key Laboratory of Urban Oil and Gas Distribution Technology, China University of Petroleum (Beijing), Beijing 102249, China)

**Abstract** This paper describes a modified Paving algorithm of automatic quadrilateral mesh generation. Although the traditional Paving algorithm has a number of recognized advantages, there are still a few obvious weaknesses with it. This paper aims to overcome the weaknesses by the modified Paving algorithm as proposed. By a carefully controlled process to generate quadrilateral element considering the sizes of pre-existing elements, high quality quadrilateral mesh can be formed without use of background mesh. In addition, Efficient intersection detection and resolution are employed to accelerate the whole process while topological clean-up and smoothing measures are used to optimize overall quality of the whole mesh. A series of mesh generation examples are presented to evaluate the performances of this algorithm and demonstrate its advantages.

**Key words** mesh generation; unstructured mesh; quadrilateral grids; paving algorithm

## 0 引言

工程上所遇到的流动与传热问题大多发生在复杂区域内, 因而不规则区域内的非结构化网格生成研究具有非常重要的实际意义。与三角形网格相比, 虽然四边形网格的自动生成技术还不够完善, 但在网格数目相同的情况下高质量四边形网格的计算精度和效率要优于三角形网格。因此, 对复杂不规则区域快速生成高质量的非结构化四边形网格已成为当前非结构化网格生成技术研究领域的热点和难点。20 世纪 80 年代以来, 非结构化四边形网格的生成技术得到了快速发展, 国内外学者提出了许多种生成非结构化四边形网格的算法, 其中比较有代表性的是 Blacker 和 Stephenson<sup>[1]</sup> 基于前沿推进思想提出的铺砌法, 该算法不需先生成三角形网格,

而是从固定边界开始直接生成四边形网格。

铺砌法由于生成网格单元的边界吻合性好、不规则节点数量少等优点而被广泛应用, 但其还存在网格尺寸过渡差和交叉判断处理效率低等缺陷。对此, 本文将提出不同于以往研究者的改进思路和实施方法, 实现复杂计算区域的高质量非结构化四边形网格生成。

## 1 对铺砌法的几点改进

### 1.1 网格尺寸控制

从 Blacker 和 Stephenson 引入铺砌法后, 国内外学者对于如何控制网格整体尺寸分布都进行了广泛深入的研究, 提出了许多解决办法。Owen<sup>[2]</sup> 的 Q-

收稿日期: 2012-12-10; 修订日期: 2013-03-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.51134006; No.51176204)

作者简介: 赵宇 (1988-), 男, 硕士研究生, 主要从事油气长距离管输研究。通信作者: 宇波, 教授, yubobox@vip.163.com。

Morph 算法借鉴了“背景网格”的概念,并结合前沿推进思想将三角形网格转化为四边形网格,通过对合并三角形过程的精细控制使生成的四边形网格不仅具有铺砌法的优点而且能够保证网格尺寸的光滑过渡。然而, Q-Morph 算法较高的复杂性和两套网格的交叉使用,会导致程序数据结构较为复杂,稳定性差,不易于实施,这种弊端同样存在于采用背景网格进行尺寸控制的直接法<sup>[3]</sup>中。Lo<sup>[4]</sup>算法生成的网格虽然尺寸过渡非常光滑,但不规则节点数量较多,网格整体质量不理想。之后 Garimella 等人<sup>[5]</sup>提出了利用“局部坐标和参数空间”控制网格生成尺寸的方法,但该算法每生成一个网格都要进行大量计算,网格生成效率较低。

本文所发展的算法在这方面没有采用背景网格或其他计算量较大的方法,而是通过综合考虑同一边界或不同边界上已生成网格的尺寸来控制后续网格的生成,保证了在计算量较小的情况下网格整体尺寸的光滑过渡。

**1.1.1 考虑同一边界上已生成网格的尺寸** 网格新边的生成依赖于新节点的生成,铺砌法按照节点内角值  $\alpha$  将节点分为四类:终止节点 ( $0^\circ < \alpha \leq 135^\circ$ ),边节点 ( $135^\circ < \alpha \leq 225^\circ$ ),角节点 ( $225^\circ < \alpha \leq 315^\circ$ )和转节点 ( $315^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ )。其中终止节点只需要闭合网格单元即可,不必生成新节点及新边,而其他三类情况则需要生成新节点和新边的生成,虽然角节点和转节点需要生成多条边,但实际上各条边的尺寸都与最初生成的边相关联,因此控制好该边的长度就能实现对网格尺寸的控制。

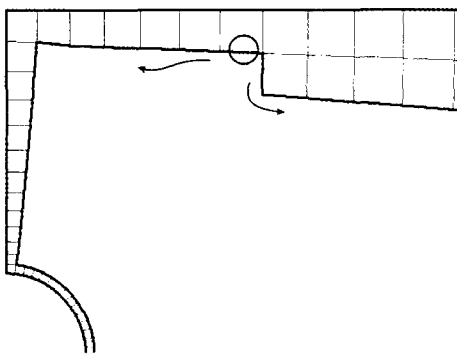


图 1 向上下游分别搜索包含终止节点的边  
Fig. 1 Search for specific edge containing end node

在考虑同一边界上已生成网格的尺寸时,如图 1 所示,首先从当前网格生成边(图中椭圆框内的边)开始向上游和下游分别搜索最近的包含终止节点的边。当在上游和下游搜索到此类边后记录边所在网格的尺寸(分别设为  $L_1$  和  $L_2$ )并计算此类边与当前

生成边之间的距离(分别设为  $d_1$  和  $d_2$ ),则新网格边的尺寸  $L$  通过式(1)计算得到:

$$L = L_1 \times \frac{d_2}{d_1 + d_2} + L_2 \times \frac{d_1}{d_1 + d_2} \quad (1)$$

通过式(1)可以看出,与当前生成边距离越近的网格其尺寸对新边尺寸的确定影响越大,因此本文算法采取的加权平均可以使已有网格的尺寸均匀地传递到计算区域的内部。此外,按照铺砌法中的步骤,根据当前网格生成边和其邻边的长度可计算得到新边的另一个尺寸值  $L'$ ,比较  $L$  和  $L'$  的相对大小,若  $L/L' > 1.5$  或  $L'/L > 1.5$  则说明单独按照上下游网格尺寸进行新边生成有可能会产生网格本身的长宽比相差过大,进而影响后续的数值计算,因此如果出现  $L/L' > 1.5$  或  $L'/L > 1.5$  的情况则通过算术平均的方式确定新边尺寸,否则即按照上下游网格确定的尺寸  $L$  进行新边的生成,这样处理既保证了网格尺寸的光滑过渡又使网格的长宽比维持在合理的范围内。

此外,若上下游其中一个或两个方向遍历完所有网格边后没有找到包含终止节点的边,这在由圆弧构成边界的计算区域中较为常见,则网格新边尺寸就根据网格生成边和其邻边的尺寸确定。

**1.1.2 考虑不同边界上已生成网格的尺寸** 与单连通区域不同,多连通区域生成网格时不同的边界如果不考虑其他边界的网格尺寸而独立地生成网格,最终可能会导致不同边界相互融合时彼此所包含的网格尺寸相差过大,进而生成大量的不规则节点,造成交界面处网格单元质量很差。

在本文所发展的算法中,多连通区域不同边界生成网格时会考虑其他边界网格尺寸的影响,具体做法是每当一个边界生成完一层网格后即计算出这层网格尺寸的平均值,当某一边界生成网格时需要检测其他所有边界网格尺寸的平均值,如果当前边界生成的网格尺寸大于其他边界网格尺寸平均值的 1.5 倍,认为若当前边界继续生成新网格有可能会产生不同边界网格尺寸相差过大,则停止当前边界的网格生成而转到其他边界上继续整个过程。

## 1.2 交叉判断与处理

**1.2.1 局部交叉判断** 铺砌法最初提出时网格单元是逐层生成<sup>[1]</sup>,这样可能会导致一层网格生成完毕后需要处理大量复杂的交叉情况,后来经过改进网格单元逐个生成<sup>[6]</sup>,并且每生成完一个网格后都要进行交叉判断,这种做法虽然有效地避免了一层网格生成完毕后一次性处理大量交叉情况带来的困难,但对于每一次的交叉判断都要遍历活动边界

上所有的边, 计算量较大。Owen<sup>[2]</sup> 的 Q-Morph 算法虽然巧妙地将交叉判断控制在局部进行, 但在网格生成过程中局部的交叉判断会改变背景网格的分布, 最终有可能使尺寸空间失效, 导致生成的四边形网格尺寸过渡很差。

经过观察, 当网格新生成的边与自身所在的边界交叉时, 交叉的位置通常出现在边界转角附近, 即新边往往与上游或下游相邻的几条边交叉, 如果按照固定的顺序进行遍历则检测效率较为低下, 所以本文发展的算法借鉴数学中“二分法”的思想, 将活动边界平均分为两半, 从新边开始首先向上游检测, 检测到交叉情况即进行相应处理, 若检测完一半边界后没有出现交叉情况则重新以新边为起点向下游检测, 这种方法在出现交叉情况时通常能够节省大约一半的检测时间, 特别是当计算区域的形状变化剧烈时有可能存在大量的交叉问题, 这种判断方法提高效率将更加明显。

为了检测完一半边界后能够快速返回最初的新边, 在编写程序时采用“指针链表”的方式存储数据, 即将活动边界上所有的网格边首尾相连形成双向链表, 这样处理使得在网格生成过程中可以利用指针“跳跃”的特点快速移动到指定位置。此外, 程序中还引入了“结构体”的数据类型, 采用这种数据类型可以整合每条边关键的特征信息, 有利于建立起对操作对象的整体认识, 同时也减少了设置数组的数量, 降低了程序的复杂度。

**1.2.2 高效交叉处理** 对于交叉情况的处理一般是要进行活动边界的拆分与合并, 即网格生成回路的分裂与连接, 在这个过程中需要确定各回路的边数、更新各边之间的连接关系并计算相关节点的内角值, 之后还会涉及到不同回路的选择, 计算量通常较大。

同样是交叉情况, 如果网格新边与自身所在的边界相交, 其位置多在转角附近, 这种情况出现时文献中仍采用一般的拆分和合并活动边界的方式进行处理<sup>[3]</sup>, 如前所述这一过程需要进行大量的判断和计算, 而本文发展的算法在出现交叉情况时首先会判断新边与其交叉边之间的网格边数, 如果网格边数为 3(不包括新边本身), 可利用新边闭合该区域, 形成一个四边形网格单元, 这样就免去了复杂的回路分裂与连接过程, 一定程度上提高了网格生成的速度。

### 1.3 预处理与拓扑优化

由于四边形网格本身的特点和几何环境的复杂多样, 在整个网格生成过程中不可避免地会出现诸如边界上内角值过小或转角处相邻边尺寸相差过

大的情况, 对于这些畸形情况的出现需要进行及时的判断和处理, 以避免生成质量较差的网格或影响网格的继续生成。对于网格生成过程中出现的畸形情况主要可分为单一内角值过小、内角值过小与相邻边尺寸相差过大并存和单一相邻边尺寸相差过大三种情况, 本文按照 Blacker 和 Stephenson 的算法<sup>[1]</sup> 对这些情况进行相应的判断处理, 具体细节不再赘述。

当整个区域的四边形网格生成完毕后, 需要对网格整体进行拓扑优化, 即通过删去或合并一些单元来减少不规则节点数量, 使绝大多数节点与四个网格单元相连, 平均节点内角值达到  $90^\circ$ , 进一步提高网格的整体质量, 为后续的数值计算建立良好的基础。本文综合以往的研究成果<sup>[1,7]</sup> 优选出易于实施并且对网格整体质量有明显提升作用的拓扑优化方法, 主要可分为去孤立点、节点合并、四二变换和节点分裂四种类型。

## 2 网格生成实例及结果分析

### 2.1 网格生成实例

本文基于上述算法采用 Fortran95 语言编写了网格生成程序, 并对多个不规则区域进行了非结构化四边形网格生成(如图 2~3 所示), 每个实例除了采用本文开发的程序进行网格剖分外还采用著名的 CFD 前处理软件 Gambit 中的相应模块进行了网格剖分, 两者所离散区域的形状和尺寸、固定边界上的节点数量和位置均完全一致。

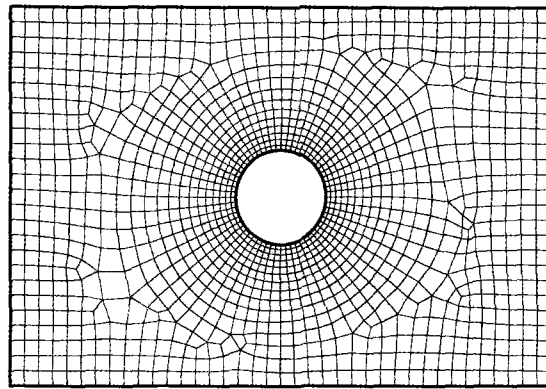
图 2 所示的圆形腔多连通区域网格剖分结果清晰地反映出了本文发展算法的特点, 仔细观察本文发展算法生成的网格, 可以看出边界周围网格单元质量很高, 几乎不存在不规则节点, 而 Gambit 所生成的网格在边界附近不规则节点数量较多, 并且空间填充效率不高。

图 3 所示的是为对边界形状复杂的多连通区域进行网格剖分的结果, 通过比较图 3(a) 和图 3(b) 可以看出本文发展的算法在区域的左侧和右侧圆环部分生成的网格尺寸过渡更加光滑, 整体分布更加均匀。

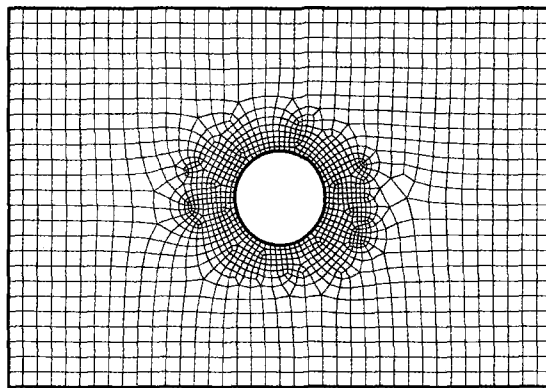
### 2.2 网格生成质量分析

在对图 2~3 所示的圆形腔区域和复杂多连通区域采用基于本文算法开发的程序和 Gambit 中相应的模块进行网格剖分的基础上, 用最重要的网格质量参数 EquiAngle ( $Q_{EAS}$ ) 为指标对两种算法生成网格的质量进行了比较, 比较结果如表 1 所示。

EquiAngle ( $Q_{EAS}$ ) 是考虑网格单元四边夹角通



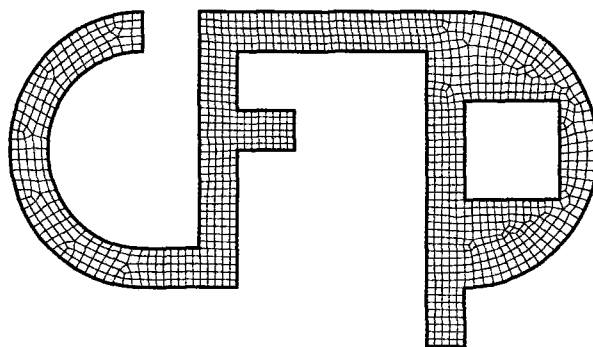
(a) Algorithm of this paper



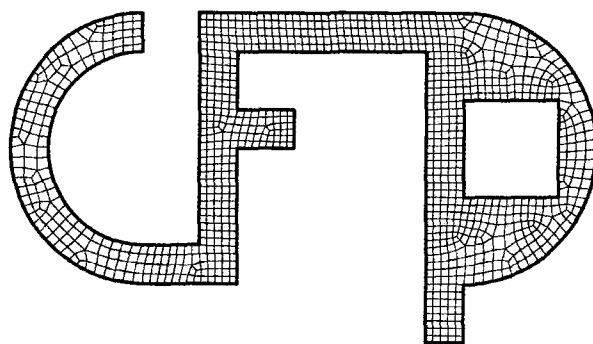
(b) Gambit

图 2 圆形腔区域

Fig. 2 Comparison in a one-circle multi-connected domain



(a) Algorithm of this paper



(b) Gambit

图 3 复杂多连通区域

Fig. 3 Comparison in a complicated multi-connected domain

表 1 本文算法与 Gambit 生成网格质量比较

Table 1 Comparison of mesh quality between the algorithm of this paper and Gambit

区域形状	方法	网格数及占总数比例						网格总数
		$Q_{EAS} = 0 \sim 0.1$	$Q_{EAS} = 0.1 \sim 0.2$	$Q_{EAS} = 0.2 \sim 0.3$	$Q_{EAS} = 0.3 \sim 0.4$	$Q_{EAS} = 0.4 \sim 0.5$	$Q_{EAS} = 0.5 \sim 1$	
圆形腔区域 (图 2)	本研究	1123 (87.39%)	91 (7.08%)	34 (2.65%)	21 (1.63%)	16 (1.25%)	0	1285
	Gambit	1130 (70.09%)	249 (15.62%)	112 (7.03%)	95 (5.96%)	8 (0.50%)	0	1594
复杂多连通区域 (图 3)	本研究	819 (75.69%)	159 (14.68%)	51 (4.71%)	28 (2.59%)	26 (2.40%)	0	1083
	Gambit	705 (69.32%)	196 (19.27%)	59 (5.80%)	53 (5.21%)	4 (0.39%)	0	1017

过式 (2) 计算得到的歪斜度, 取值在 0 到 1 之间, 越接近 0 表明网格单元质量越好, 0 表示网格单元为正方形质量最好, 1 表示网格单元质量最差。

$$Q_{EAS} = \max \left[ \frac{\theta_{\max} - \theta_e}{180 - \theta_e}, \frac{\theta_e - \theta_{\min}}{\theta_e} \right] \quad (2)$$

式中,  $\theta_{\max}$  为网格单元四边夹角的最大值;  $\theta_{\min}$  为网格单元四边夹角的最小值;  $\theta_e$  为夹角参考值, 四边形网格取  $90^\circ$ 。

如表 1 所示, 采用本文发展的算法生成的网格, 两个实例都有 75% 以上的网格形状接近正方形 ( $Q_{EAS} = 0 \sim 0.1$ ), 同时不存在偏离正方形程度较大的网格 ( $Q_{EAS} > 0.5$ )。对于复杂多连通区域, 形状接近正方形的网格数占网格总数的百分比由 Gambit 生成网格的 69.32% 增加到 75.69%, 而对于圆形腔区域在与 Gambit 生成网格总数相差较大的情况下, 本文算法生成的高质量网格占网格总数的百分比可达 87.39%。

### 3 结 论

本文基于铺砌法思想发展了一种能够快速生成高质量非结构化四边形网格的算法, 提出了不依赖背景网格而是通过已生成的网格控制后续网格尺寸的方法, 借鉴了数学“二分法”的思想并结合数据结构体和双向指针链表提高交叉判断和处理的效率及稳定性, 并综合以往研究成果中各项畸形网格处理和拓扑优化技术来提高网格的整体质量。基于该算法开发了相应的程序对多个不规则区域进行了网

格剖分, 通过与 Gambit 软件生成网格的结果进行对比, 可以看出本文算法能够快速高效地进行网格剖分, 生成的网格单元几何不规则度更小, 空间填充效率更高, 整体质量得到了明显提升。

### 参 考 文 献

- [1] Blacker T D, Stephenson M B, Canann S. Paving: A New Quadrilateral Meshing Technique [J]. *Adv Engrg Software*, 1991, 13: 332-337
- [2] Owen S J, Staten M L, Canann S A, et al. Q-Morph: an Indirect Approach to Advancing Front Quad Meshing [J]. *Int J Numer Meth Engrg*, 1999, 44: 1317-1340
- [3] 王龙. 一类非结构任意四边形网格自动生成 [D]. 湖南: 湘潭大学数学系, 2001  
WANG Long. An Unstructured Automatic Quadrilateral Mesh Generation on Arbitrary Geometry [D]. Hunan: Xiangtan University, 2001
- [4] Lo S H. Generating Quadrilateral Elements on Plane and over Curved Surfaces [J]. *Comput Struct*, 1989, 31: 421-426
- [5] Garimella R V, Shashkov M J, Knupp P M. Triangular and Quadrilateral Surface Mesh Quality Optimization Using Local Parametrization [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2004, 193: 913-928
- [6] White D R, Kinney P. Redesign of the Paving Algorithm: Robustness Enhancements Through Element by Element Meshing [C]//Proceedings of 6th International Meshing Roundtable. Park City: Utah, USA, 1997: 323-335
- [7] Canann S A, Tristano J R, Staten M L. An Approach to Combined Laplacian and Optimization-Based Smoothing for Triangular, Quadrilateral, and Quad-Dominant Meshes [C]//Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable. Dearborn: Michigan, USA, 1998: 479-494